Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 1

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,1]^\top, [0,1,-1,0]^\top, [1,2,1,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [0,1,2,1]^\top, [0,1,2,-1]^\top, [3,-3,0,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,-1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,1,-2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,3,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,1,3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{k_nx}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 2

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,-1,0]^\top, [-2,0,1,0]^\top, [0,1,1,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,-1]^\top, [1,1,-3,0]^\top, [2,-1,1,0]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 3

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,-1]^\top, [1,0,-1,2]^\top, [1,2,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,0,3]^\top, [2,1,1,0]^\top, [1,3,1,3]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,2,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,2,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [4,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,-1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,2,5]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,7,9]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-2,1,-3]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 4

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [-1,0,1,1]^\top, [2,2,-1,0]^\top, [1,-1,0,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,1,0,0]^\top, [2,0,1,0]^\top, [1,-1,0,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,4,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,4,4]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,1,0]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,-1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,5]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,-1,5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 5

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,2,0]^\top, [0,1,1,0]^\top, [1,1,0,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,2,1,1]^\top, [0,1,2,3]^\top, [1,0,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,0,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,3,-1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-2,-3,1]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 6

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,2,0,1]^\top, [0,-1,-1,1]^\top, [1,2,1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,1,0]^\top, [0,0,1,1]^\top, [1,1,-1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,3,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,-1,2]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,4,8]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,0,4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,1,7]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 7

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,2]^\top, [1,-2,1,0]^\top, [2,-1,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,-1,1,0]^\top, [1,0,-1,1]^\top, [0,3,0,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,-1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,2,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,2]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,0,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,3,-3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,2,-9]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 8

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [1,-1,2,0]^\top, [-1,0,0,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,3,1,0]^\top, [1,0,2,-2]^\top, [0,2,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [6,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [0,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [4,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,-2,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [6,1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,3]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,8]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,-2,8]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)

Вариант 9

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [-1,0,1,1]^\top, [1,0,1,2]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [-1,1,-1,1]^\top, [1,1,-1,1]^\top, [1,2,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,0,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,5,3]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,2,2]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [3,-2,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)

Вариант 10

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,1,1]^\top, [1,-1,1,-1]^\top, [1,3,1,3]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,2,0,2]^\top, [1,2,1,2]^\top, [3,1,3,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,-1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,3,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,1,1]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,-4,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,0,3]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,7]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 11

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [2,-1,0,-2]^\top, [3,-2,1,0]^\top, [1,-1,1,-1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [3,-1,-1,0]^\top, [0,-1,2,3]^\top, [3,-2,-1,0]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [-1,0,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,0,2]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,3,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [-1,0,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [1,1,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,2,4]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-1,-4,7]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [0,2,-2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)

Вариант 12

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,1,0,0]^\top, [0,1,1,0]^\top, [0,0,1,1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,0]^\top, [0,2,1,1]^\top, [1,2,1,2]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,-2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [3,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,-1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,-1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,-1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,-2,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,3]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [2,1,6]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,0,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1– симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 13

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,-1,0,1]^\top, [3,1,1,1]^\top, [1,2,-1,-1]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [2,1,0,1]^\top, [1,-1,3,7]^\top, [-1,1,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,2,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [-1,1,1]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$,t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [2,1,3]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [3,2,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-4]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [2,1,5]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a,n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)

Вариант 14

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,-1,0,1]^\top, [1,0,0,1]^\top, [-2,0,1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,-1,1,-1]^\top, [0,2,1,1]^\top, [-1,1,1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [2,-1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,0,1]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [1,2,-1]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [2,1,0]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [0,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [2,-1,2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,5]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [2,1,0]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [4,-1,2]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1– симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.

Задание 5 (сдать к 17 марта)
Вариант 15

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle [1,0,0,1]^\top, [0,1,2,-1]^\top, [2,-1,-1,0]^\top \right\rangle;$$
$$\mathcal{L}_2 = \left\langle [1,0,1,0]^\top, [0,1,-1,3]^\top, [4,-1,-1,1]^\top \right\rangle.$$

2. Найти матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ к базису $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,2,1]^\top, \quad \mathbf{a}_3 = [1,2,-2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,1,2]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [0,2,1]^\top, \quad \mathbf{b}_3 = [1,-1,0]^\top.$$

3. Доказать, что каждая из двух систем функций $t - t^2$,t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты во втором.

4. Векторы $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_k$ заданы своими координатами в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a}_1 = [2,1,1]^\top, \quad \mathbf{a}_2 = [3,2,1]^\top, \qquad \mathbf{a}_3 = [1,2,-2]^\top;$$
$$\mathbf{b}_1 = [1,3,8]^\top, \quad \mathbf{b}_2 = [-3,2,-2]^\top, \qquad \mathbf{b}_3 = [2,2,8]^\top.$$

Найти матрицы линейного оператора, переводящего $\mathbf{a}_k$ в соответствующие $\mathbf{b}_k$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в базисе $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$.

5. Пусть a и n–ненулевые векторы трехмерного пространства, причем $(a, n) \neq 0$, а L–плоскость с нормальным вектором n. Пусть преобразование φ есть проектирование на L параллельно вектору a. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро и образ.

6. Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств L_1–симметрических и L_2–кососимметрических матриц. Найти проекции матрицы A на L_1 параллельно L_2 и на L_2 параллельно L_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти базис ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8*. Пусть $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — подпространство многочленов степени не более n в $\mathbb{R}[x]$.

(a) Доказать, что $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на $\mathbb{R}[x]_n$, что он нильпотентен и представить его матрицей в каком-нибудь базисе.

(b) Найти собственные числа и векторы оператора $x\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]_n$.

9*. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx\}$;

(b) $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x}\}$, где $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$.